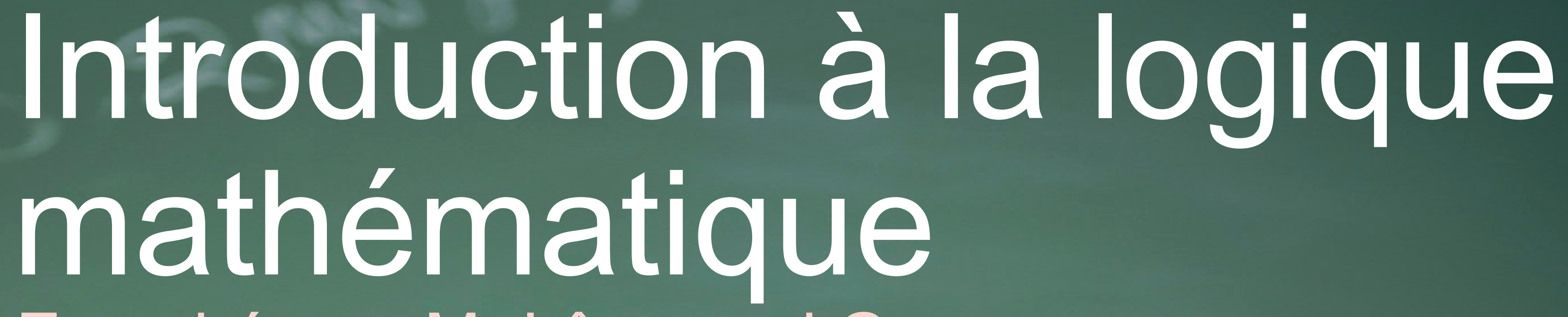
Introduction à la logique mathématique



Encadré par: Mr Lâaroussi Gary

Animé par: Mr Houssem Eddine Fitati

Année scolaire 2012 – 2013

CREFOC-Radès



Introduction:



La **logique mathématique**, **logique formelle** ou **méta-mathématique** est une discipline des mathématiques introduite à la fin du XIXe siècle, qui s'est donnée comme objet l'étude des mathématiques en tant que langage. Les objets fondamentaux de la logique mathématique sont les *formules* modélisant les énoncés mathématiques, les *dérivations* ou *démonstrations formelles* modélisant les raisonnements mathématiques et les *sémantiques* ou *modèles* qui définissent le « sens » des formules (et parfois même des démonstrations) comme certains invariants : par exemple l'interprétation des formules du calcul des prédicats dans les structures permet de leur affecter une *valeur de vérité*.

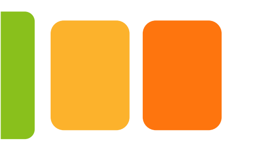
(source wikipédia)



Ça sert à quoi ?



Les maths, çà sert à rien !?



Préambule

Un résultat mathématique (ou une proposition) est un énoncé

vrai. Suivant son importance, il est qualifié de :

- lemme : résultat d'une importance mineure,
- théorème : résultat d'une importance majeure.

Faire une démonstration (on dit aussi preuve), c'est réaliser un

processus qui permet de passer de propositions supposées vraies prises comme hypothèses à une proposition appelée:

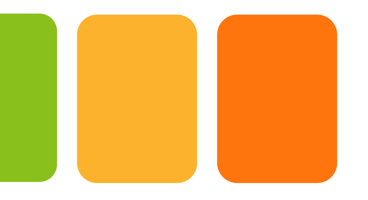


Plan du cours

- Assertion et prédicat
- Propriétés
- Les connecteurs logiques
- Les quantificateurs mathématiques
- Différents modes de démonstration







Assertion & prédicat

Définitions et exemples



Assertion:

- Définition:

Une assertion est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer la valeur de vérité:

vraie (V) ou faux (F)

mais jamais les deux à la fois. C'est le principe du tiers-exclu.

- Exemple:

  - L'énoncé « 24 est un multiple de 2 » est vrai (V).
  - L'énoncé « 19 est un multiple de 2 » est faux (F).
  - L'énoncé « Tunis est la capitale de la Tunisie » est vrai (V).



Prédicat:

- Définition:

Un prédicat est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées variables tel que quand on remplace chacune de ces variables par un élément donné d'un ensemble, on obtient une assertion.

- Exemple:

L'énoncé suivant :

P(n) = « n est un multiple de 2 »

est un prédicat car il devient une assertion quand on donne

une valeur à n.

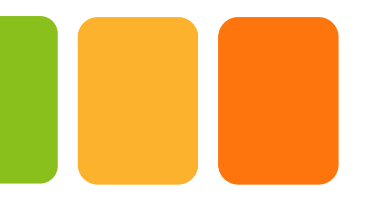
- P(10) = « 10 est un multiple de 2 » est une assertion vraie,
- P(11) = « 11 est un multiple de 2 » est une assertion



- Remarque:

Une assertion peut s’interpréter comme un prédicat sans variable, c’est-à-dire comme un prédicat toujours vrai ou toujours faux.





Les connecteurs logiques

Négation, conjonction , disjonction , implication & équivalence.



Négation:

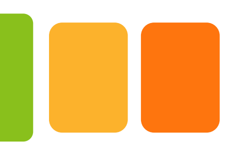
Les connecteurs logiques permettent de créer de nouveaux prédicats (dits prédicats composés) à partir de prédicats P, Q,

Soit P un prédicat. La négation du prédicat P est le prédicat

noté non(P) qui:

- est vrai lorsque P est faux,
- est faux lorsque P est vrai.

P	Non(P)
V	F
F	V



Exemples:

- L’assertion P = « 24 est un multiple de 2 » est une assertion vraie (V). L’assertion non(P) est définie par :

  non(P) = « 24 n’est pas un multiple de 2 ».

C’est une assertion fausse (F).

- A partir du prédicat « $x \in A$ », on définie le prédicat

  non ($x \in A$) = « x /$\notin$ A ».

  Par exemple, l’assertion « $1/2 \notin Z$ » est vraie car

  l’assertion « $1/2 \in Z$ » est fausse.



Conjonction:

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat « P et Q », appelé conjonction de P et de Q, est un prédicat qui:

- est vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément,
- est faux dans tous les autres cas.

P	Q	P et Q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

On résume ceci dans la table de vérité:

On écrit par fois : $P \wedge Q$ au lieu de P et Q.



Disjonction:

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat « P ou Q », appelé disjonction de P et de Q, est un prédicat qui:

- est vrai lorsque l'un au mois des deux prédicat P et Q est vrais,
- est faux lorsque les deux sont faux.

On résume ceci dans la table de vérité:

P	Q	P ou Q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On écrit par fois : $P \vee Q$ au lieu de P ou Q.



Exemple:

On en déduit les deux assertions :

Considérons les deux assertions P et Q suivantes :

- P = « 10 est divisible par 2 »,
- Q = « 10 est divisible par 3 ».

L'assertion P est vraie tandis que l'assertion Q est fausse.

- P et Q = « 10 est divisible par 2 et 10 est divisible par 3 »,
- P ou Q = « 10 est divisible par 2 ou 10 est divisible par 3 ».

L'assertion « P et Q » est une assertion fausse. En revanche, l'assertion « P ou Q » est une assertion vraie.



Implication:

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat « P ⇒ Q » appelé implication de P vers Q est un prédicat qui:

- est faux lorsque P est vrai et Q faux,
- est vrai dans tous les autres cas.

On résume ceci dans la table de vérité :

P	Q	P Q
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

- On dit que P est une condition suffisante pour Q.
- Q ⇒ P s’appelle l’implication réciproque de P ⇒ Q.



Equivalence:

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat « P $\Leftrightarrow$ Q » appelé équivalence de P et de Q est un prédicat qui:

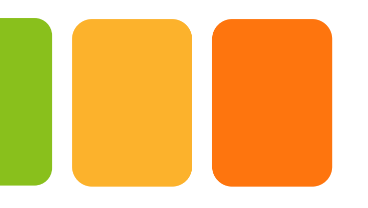
- est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrai ou faux.
- est faux dans tous les autres cas.

On résume ceci dans la table de vérité :

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

- (P Q) et (Q R) se note: P Q R.
- (P $\Leftrightarrow$ Q) et (Q $\Leftrightarrow$ R) se note: P $\Leftrightarrow$ Q $\Leftrightarrow$ R.





Propriétés

Équivalence , tautologie , prédicats incompatibles.



Équivalences:

Soient R_1 et R_2 deux prédicats. Si

- R_1 est vrai lorsque R_2 est vrai
- R_1 est faux lorsque R_2 est faux

Alors on dit que R_1 et R_2 sont de même table de vérité ou qu'ils sont logiquement équivalents, et on note $R_1 \equiv R_2$. Dans le cas contraire on note: $R_1 \not\equiv R_2$.

Exemple:

- Soit P un prédicat. Non(non(P))≡P.
- Soit P et Q deux prédicats. P et (P ou Q) ≡P.



Tautologie:

Considérons un prédicat P. Ce prédicat peut prendre la valeur (de vérité) Vrai ou Faux. Considérons le prédicat composé :

R = « P ou non (P) ».

Ce prédicat est remarquable. En effet, R est toujours vrai et ce indépendamment de P. Vérifions-le :

P	Non P	P ou non P
V	F	V
F	V	V

Le prédicat composé R est alors qualifié de tautologie.

Définition:

Un prédicat composé R qui est vrai quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui le composent, est appelé une tautologie.



Prédicats incompatibles:

Soit P un prédicat. Considérons le prédicat composé :

« P et non (P) ».

Ce prédicat est toujours faux. Vérifions-le :

P	Non P	P et non P
V	F	F
F	V	F

On dit que les prédicats P et non(P) sont incompatibles.

Définition:

On dit que deux prédicats composés sont incompatibles si leur conjonction est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui les composent.



Propriétés incontournables:

- Soit P et Q deux prédicats, on a les équivalences logiques suivantes:

Non(P ou Q) ≡ non(P) et non(Q)

Non(P et Q) ≡ non(P) ou non(Q)

Ce sont les lois de Morgan pour les prédicats.

- Soit P, Q et R trois prédicats, on a aussi les équivalences suivantes:

P ou (Q et R) ≡ (P ou Q) et (P ou R)

P et (Q ou R) ≡ (P et Q) ou (P et R)



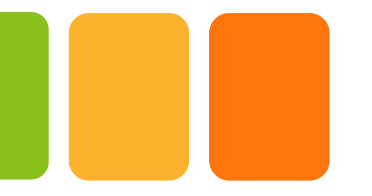
Propriétés incontournables:

Soit P et Q deux prédicats , on a les les équivalences logiques suivantes:

1) P Q ≡ (non P) ou Q
2) (Non P) Q ≡ P et (non Q)
3) P Q ≡ (non Q) (non P)
4) P ⇔ Q ≡(P Q) et (Q P)

- On dit que Q est une condition nécessaire pour P.
- L'implication: (non Q) (non P) est appelée la contraposée de P Q .





Quantificateurs mathématiques:

Quantificateurs simples, multiples , négations.



Les quantificateurs simples:

A partir d’un prédicat P(x) définie sur un ensemble E, on construit de nouvelles assertions (dites assertions quantifiées) en utilisant les quantificateurs « quel que soit » et « il existe ».

Définition:

Le quantificateur « quel que soit » noté $\forall$, permet de définir l’assertion quantifiée « $\forall x \in E$ P(x) » qui est vraie si pour tous les éléments x appartenant à E, l’assertion P(x) est vraie.



Les quantificateurs simples:

Exemples:

- « $\forall x \in [-3, 1]\ \ x^2+2x-3 \geq 0$ » est vraie.
- « $\forall n \in \mathbb{N}\ \ (n - 3)n > 0$ » est fausse.
- « $\forall n \in \mathbb{N}$ (n^2 paire   n est paire) » est vraie.

Définition:

Le quantificateur « il existe » noté $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\exists x \in E\ P(x)$ » qui est vraie si on peut trouver (au moins) un élément x appartenant à E tel que l'assertion P(x) soit vraie.

S'il en existe un et un seul, on pourra écrire $\exists !\ x \in E\ P(x)$ et on dira qu'il existe un unique élément x de E vérifiant P(x).



Les quantificateurs simples:

Exemples:

- L'assertion quantifiée: « $\exists x \in \mathbb{R}$ $x^2=4$ » est vraie.
- L'assertion quantifiée: « $\exists ! x \in \mathbb{R}$ $\ln(x)=1$ » est vraie.

Si « $\forall x \in E$ P(x) » est vraie alors « $\exists x \in E$ P(x) » est vraie



ATTENTION On manipulera avec précaution les assertions de la forme « $\exists ! x \in E$ P(x) » pour lesquelles la notation « $\exists !$ » ne désigne pas un quantificateur (bien qu'elle en ait l'air !)



Quantificateurs simples:

En effet, on se convainc facilement de l'équivalence logique :

$$\exists ! x \in E \; P(x) \equiv R1 \text{ et } R2$$

Où les deux assertions R1 et R2 sont définies comme suit:

- R1=« $\exists x \in E \; P(x)$ ».
- R2=« $\forall x \in E \;\; \forall x' \in E \; (P(x) \text{ et } P'(x)) \quad x=x'$

L'assertion R_1 traduit l'existance d'un élément de E vérifiant p(x)

L'assertion R_2 traduit l'unicité de cet élément.



Règle de négation:

Soit P(x) un prédicat sur E. De manière évidente, on a :

$$\text{Non}(\forall\ x \in E\ P(x) \equiv\ \exists\ x \in E\ \text{non}(P(x))$$

$$\text{Non}(\exists\ x \in E\ P(x) \equiv\ \forall\ x \in E\ \text{non}(P(x))$$

Exemple:

Soit P(x) un prédicat sur E. On a :

$$\text{Non}(\forall\ x \in E\ P(x) \quad Q(x) \equiv\ \exists\ x \in E\ (P(x)\ \text{et non}\ Q(x))$$

ATTENTION On vérifie aussi que l'on a :

$$\text{Non}(\exists\ x \in E\ P(x)\ ) \equiv \text{non}R_1\ \text{et non}\ R_2$$

Avec existence et unicité



Quantificateurs multiple:

Définition:

Soit P(x, y) un prédicat à deux variables avec $x \in E$ et $y \in F$.

- L'assertion quantifiée: $\forall x \in E\ \forall y \in F\ ;\ P(x, y)$ est vraie lorsque tous les éléments x de E et tous les éléments y de F vérifiant P(x, y).
- L'assertion quantifiée: $\exists x \in E\ \exists y \in F\ P(x, y)$ est vraie lorsqu'il existe (au moins) un élément x appartenant à E et lorsqu'il existe (au moins) un élément y appartenant à F vérifiant P(x, y).



Quantificateurs multiple:

Exemples:

- Soit le prédicat à deux variables avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

est vrai.

Alors, l'assertion « $\forall z \in C \; \forall n \in N \; P(z, n)$ » est vraie.

- L'assertion quantifiée: $\forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{R}_+ \; 1+nx \leq (1+x)^n$ est vraie
- L'assertion quantifiée: $\exists x \in R \; \exists y \in R \; x + y = 5$ est vraie.



Règles d'utilisation:

On peut combiner des quantificateurs de natures différentes
Par exemple, l'énoncé

- « tout nombre complexe possède au moins une racine carrée » s'écrit sous la forme : $\forall z \in \mathbb{C} \exists u \in \mathbb{C}\ u = z^2$.

Mais, attention, il faut respecter les règles suivantes :

- On peut permuter deux quantificateurs identiques : $\forall x \in E\ \forall y \in F\ ;\ P(x, y) \equiv \forall y \in F\ \forall x \in E\ ;\ P(x, y)$
- On peut permuter deux quantificateurs identiques : $\exists x \in E\ \forall y \in F\ ;\ P(x, y) \not\equiv \exists y \in F\ \forall x \in E\ ;\ P(x, y)$



Règles d'utilisation:

- L'assertion quantifiée: «$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ \exists!\ x \in \mathbb{R}_+^*\ \ln(x)=\alpha$ » est vraie
- L'assertion « $\forall x \in R\ \exists y \in R\ x + y = 0$ » est vraie. En revanche, l'assertion « $\exists y \in R\ \forall x \in R\ x + y = 0$ » est fausse.
- L'assertion quantifiée

$$« \forall x \in R\ \exists\ y \in R\ x \leq y »$$

est une assertion vraie puisque si $x \in R$ alors, en prenant y = x + 1 on a : $x \leq x + 1$. En revanche l'assertion

$$« \exists\ y \in R\ \forall x \in R\ x \leq y »$$

est fausse puisque l'ensemble des réels n'est pas borné.



Différents modes de demonstration

Par hypothèse auxiliaire, par l’absurde ,par contraposée, par contre-exemple, par récurrence .



Raisonnement par hypothèse auxiliaire

- But : montrer qu'un énoncé *Q* est vrai.
- Principe : il s'appuie sur la tautologie :

(P et (P Q)) Q

Ainsi, si l'énoncé *P* est vrai et si l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est vraie alors l'énoncé *Q* est nécessairement vrai.

- Méthodologie : on montre que l'énoncé *P* est vrai.

L'énoncé *Q* sera alors vrai puisque « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

- Exemple Considérons les deux ensembles $A = \{2, -3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,/ x^2 + x - 6 = 0\}$. Montrons que : $A = B$.



Raisonnement par l'absurde:

- But : montrer qu'un énoncé P est vrai.
- Principe : il s'appuie sur l'équivalence logique :

$$(\text{non}(P) \Rightarrow Q) \text{ et } (\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q)) \equiv P.$$

Un raisonnement par l'absurde consiste à montrer que non(P) entraîne un énoncé Q et son contraire non(Q).

- Méthodologie : on suppose l'énoncé non(P) vrai et on cherche alors Q qui, sous cette hypothèse, serait à la fois vrai et faux. On dit que l'on a obtenu une contradiction ou que l'hypothèse est contradictoire
- Exemple: Montrons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.



Raisonnement par contraposée:

- But : montrer des résultats faisant apparaître une implication « $P \Rightarrow Q$ ».
- Principe : il s'appuie sur l'équivalence logique :

$$P \Rightarrow Q \equiv \text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$$

Ainsi, au lieu de montrer l'implication « $P \Rightarrow Q$ », on montre sa contraposée $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.

- Méthodologie : on fait l'hypothèse que non(Q) est vrai et on montre que cela entraîne que non(P) est vrai.
- Exemple: Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}$



Raisonnement par contre exemple:

- But : il sert à montrer qu'un énoncé de la forme

« $\forall x \in E\ P(x)$ » est un énoncé faux.

- Principe : on montre que sa négation est vraie. Rappel :

Non $\forall x \in E\ P(x) \equiv \exists\ x \in E$ non $P(x)$

- Méthodologie : on cherche alors à exhiber un élément $x \in E$ qui ne vérifie pas $P(x)$.



- Exemple:Montrons que « $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall\ \varepsilon > 0 |x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0$» est faux.

ATTENTION à ne pas confondre avec l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ (\forall \varepsilon > 0\ |x|<\varepsilon\ \ \Rightarrow x = 0)$$

qui est utilisée pour montrer qu'un nombre réel est nul.



Raisonnement par récurrence:

- But : montrer qu'un énoncé de la forme:

« Pour tout entier naturel $n > n_0$ P(n) »

est un énoncé vrai. Par exemple,

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + nx \leq (1 + x)^n$

- Principe : Si la propriété $P(n_0)$ est vraie et si l'implication

« $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ » est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

alors la propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$



Raisonnement par récurrence:

- Méthodologie: elle s'effectue ainsi en deux étapes successives.

1. Étape d'initialisation : on commence par vérifier que $P(n0)$ est vraie.
2. Étape d'hérédité : on montre ensuite que si $P(n)$ est vraie alors $P(n + 1)$ est vraie.

- Exemple:

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \neq 0$

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$



Pour finir:



Attention aux raisonnements hâtifs !

Suivez attentivement chacune des étapes suivantes :

- Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$x^2=x-1 \qquad (1)$$

- Puisque la valeur nulle ne vérifie pas cette équation, divisons par x membre à membre. Après réarrangement des termes, nous obtenons

(2)

- En regroupant les égalités (1) et (2), nous en déduisons

(3)

- Finalement, puisque x est non nul, nous multiplions par x l'égalité (3) pour obtenir l'équation:

$$x^3 = -1 \qquad (4)$$

dont −1 est de toute évidence une solution.

- Injectons cette solution dans l'égalité (1). Nous obtenons au final que

$$1 = -2.$$

- Donc, fièrement, on écrit : « 2 = -1 » du Candide
- Bien évidemment, nous avons commis une erreur dans notre raisonnement. Mais où ?



Annexes:



- Wikipédia.
- INSA de Lyon
- Le site du zéro